

Стохастичне лінійне програмування

Богдан Кулинич

6 квітня 2016

Задача лінійного програмування

optimize $z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$
s.t.

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- ▶ A — випадкова величина?
- ▶ $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \rightarrow P(A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}) < p$
- ▶ $\mathbf{c}$ — випадкова величина?

Задача лінійного програмування

optimize $z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$
s.t.

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- ▶ A — випадкова величина?
- ▶ $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \rightarrow P(A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}) < p$
- ▶ $\mathbf{c}$ — випадкова величина?

Випадкові величини

- ▶ Припустимо, що всі випадкові величини надалі дискретні
- ▶ На практиці, це означає що ми маємо описати всі можливі випадки скінченною кількістю *сценаріїв*
- ▶ Наприклад, нехай Y – врожайність в тоннах на гектар.

$$Y = \begin{cases} 500 & p = 1/3 \text{ (найкращий сценарій)} \\ 300 & p = 1/3 \text{ (середній сценарій)} \\ 70 & p = 1/3 \text{ (найгірший сценарій)} \end{cases}$$

Стохастичні обмеження

- ▶ Простий приклад стохастичної задачі ЛП
- ▶ A — випадкова величина
- ▶ $\min z = 5x + 6y$
s.t.

$$ax + by \geq 3$$

$$x, y \geq 0$$

$$a \sim U[1, 2, \dots, 6]$$

$$b \sim U[1, 2, \dots, 6]$$

Стохастичні обмеження

- ▶ *Інтерпретується по-різному*
- ▶ Можна переписати як детерміністичну ЛП
- ▶ $\min z = 5x + 6y$
s.t.

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad ix + jy \geq 3$$
$$x, y \geq 0$$

Стохастичні обмеження

- ▶ Інша інтерпретація
- ▶ Для кожного сценарія (i, j) , хочемо знайти два рішення: x_{ij}, y_{ij} . Оптимізуватимемо

$$z' = f(\{x_{ij} \mid i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}) = E[z \mid a, b]$$

- ▶ Можна також переписати як детерміністичну ЛП
- ▶ Нехай $p_{ij} = P(a = i, b = j)$
- ▶ $\min \quad E[z \mid a, b] = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,6\}} p_{ij}(5x_{ij} + 6y_{ij})$
s.t.

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad ix_{ij} + jy_{ij} \geq 3$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad x_{ij}, y_{ij} \geq 0$$

Стохастичні обмеження

- ▶ Нехай A – випадкова величина. Змінимо форму $Ax \geq b$ на $P(Ax \geq b) < p$
- ▶ Маємо $\min z = 5x + 6y$
s.t.

$$\begin{aligned} P(ax + by \geq 3) &\geq 1 - \alpha \\ x, y &\geq 0 \\ \alpha &= 0.05 \end{aligned}$$

Стохастичні обмеження

- ▶ Для кожного x, y можна перелічити усі елементарні події a, b , які задовільняють умові.
- ▶ Нехай, наприклад, $x = 1, y = 0$

a	b	$ax + by \geq 3$	$P(a, b)$
1	1	ні	$1/36$
1	2	ні	$1/36$
2	1	ні	$1/36$
2	2	ні	$1/36$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	6	так	$1/36$

Стохастичні обмеження

- ▶ $\min z = 5x + 6y$
s.t.

$$\sum_{i,j \in \{1,2,\dots,6\}} P(a = i, b = j) I[ix + jy \geq 3] \geq 1 - \alpha$$

$$x, y \geq 0$$

$$\alpha = 0.05$$

- ▶ Задача стохастичного програмування з імовірнісними обмеженнями
- ▶ Можна переписати як детерміністичну задачу оптимізації (не обов'язково лінійну)

Стохастичні обмеження

- ▶ Замість індикаторів $I[ix + jy \geq 3]$ введемо змінні $z_{ij} \in \{0, 1\}$
- ▶ Нехай також $p_{ij} = P(a = i, b = j)$
- ▶ Для деякого малого сталого значення δ і великого M :
$$\min z = Md_{ij} + 5x + 6y$$
$$\text{s.t.}$$

$$\sum_{i,j \in \{1,2,\dots,6\}} p_{ij}d_{ij} \geq 1 - \alpha$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad d_{ij} \geq \frac{1}{M}(ix + jy - 3 + \delta)$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad d_{ij} \in \{0, 1\}$$

$$x, y \geq 0$$

$$\alpha = 0.05$$

- ▶ Змішана задача цілочисельного програмування

Стохастична цільова функція

- ▶ $\mathbf{c}$ – випадкова величина
- ▶ Припустимо, що в конкретній задачі є сенс оптимізувати не $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$, а очікуване значення цільової функції $E[\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}]$

$$E[\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}] = \sum_{\xi \in C} P(\mathbf{c} = \xi) \xi \cdot \mathbf{x} = \underbrace{\left(\sum_{\xi \in C} P(\mathbf{c} = \xi) \xi \right) \cdot \mathbf{x}}_{E[\mathbf{c}]} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{x}$$

- ▶ $\mathbf{c}'$ — детерміністична
- ▶ Зводиться до детерміністичної задачі ЛП

Стохастична цільова функція

- ▶ Приватбанк відкрив peer-to-peer кредитування (пряме кредитування іншого клієнта банку) із надвисокою річною ставкою 24%
- ▶ На випадок дефолту позичальника існує страховий план. Деталей умови плану немає у відкритому доступі, тому припустимо, що страхова виплачує первинну суму вкладу
- ▶ Найвища річна ставка депозиту в Райффайзен Банк Аваль — 14.75%
- ▶ Початковий капітал $W_0 = 15K$ грн
- ▶ Коефіцієнт прибутку за рік депозитного рахунка Райффайзен Банк Аваль $c_2 = 1.1475$ (безризиковий актив).
- ▶ Коефіцієнт прибутку за рік при вкладі в p2p кредит Приватбанку, *припускаючи, що імовірність дефолту 10%*

$$c_1 = \begin{cases} 1.24 & p = 0.90 \\ 1 & p = 0.10 \end{cases}$$

Стохастична цільова функція

- ▶ Хочемо оптимальним чином розподілити капітал W_0 між вкладом в пряме кредитування в ПриватБанку (x_1) і депозитом в Райффайзен (x_2).
- ▶ Проста максимізація доходу очевидна (покласти все в ПриватБанк)
- ▶ Ми хочемо також мінімізувати ризик, використаємо модифіковану mean-variance модель із L^1 ризиком $\sqrt{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}}$:

$$\min \quad \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} x_1 x_2} - \lambda E[c_1 x_1 + c_2 x_2]$$

s.t.

$$x_1 + x_2 = W_0 = 15K$$

$$x_1, x_2 > 0$$

Стохастична цільова функція

- ▶ $E[c_1] = 0.90 \cdot 1.24 + 0.10 \cdot 1 = 1.216$
- ▶ $E[c_1 x_1] = 0.90 \cdot 1.24 \cdot x_1 + 0.10 \cdot 1 \cdot x_1 = 1.216 \cdot x_1$
- ▶ Обрахуємо стандартне відхилення для c_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sqrt{0.90 \cdot (1.24 - 1.216)^2 + 0.10 \cdot (1 - 1.216)^2} \\ &= 0.072\end{aligned}$$

Для c_2 : $\sigma_2 = 0$

- ▶ $\sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} x_1 x_2} = \sigma_1 x_1 = 0.072 x_1$
- ▶ $E_{c_1}[c_1 x_1 + c_2 x_2] = E_{c_1}[c_1 x_1] + c_2 x_2 = 1.216 x_1 + 1.1475 x_2$

Стохастична цільова функція

- ▶ $\max \quad \lambda 1.216x_1 + \lambda 1.1475x_2 - 0.072x_1$
s.t.

$$x_1 + x_2 = W_0 = 15K$$

$$x_1, x_2 > 0$$

- ▶ Для $\lambda = 0$, $x_2 = 15K$ ($\max -0.072x_1 + 0x_2$)
- ▶ Для $\lambda \leq 1$, чутливість до ризику висока, все кладемо в Райффайзен Банк
- ▶ Для $\lambda > 1$, менш чутливі до ризику, тому все кладемо в ПриватБанк

Стохастична цільова функція

- ▶ Цікавіше, максимізуємо дохід, але обмежимо L^1 ризик (risk hedging)
- ▶ Використаємо модель:

$$\max \quad E[c_1x_1 + c_2x_2] = 1.216x_1 + 1.1475x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sqrt{\sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + \sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_1x_2} = 0.076x_1 \leq \beta \\ & x_1 + x_2 = W_0 = 15K \\ & x_1, x_2 > 0 \end{aligned}$$

- ▶ Для 15000 грн, припустимо, що хочемо обмежити ризик умовними $\beta = 500$ грн. Тоді $x_1 = 6944.44$, $x_2 = 8055.56$
- ▶ Для $\beta = 1000$, $x_1 = 13889$, $x_2 = 1111.11$
- ▶ Для $\beta = 2000$, можна все класти в ПриватБанк.

Стохастична цільова функція

- ▶ Цікавіше, максимізуємо дохід, але обмежимо L^1 ризик (risk hedging)

- ▶ Використаємо модель:

$$\max \quad E[c_1x_1 + c_2x_2] = 1.216x_1 + 1.1475x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sqrt{\sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + \sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_1x_2} = 0.076x_1 \leq \beta \\ & x_1 + x_2 = W_0 = 15K \\ & x_1, x_2 > 0 \end{aligned}$$

- ▶ Для 15000 грн, припустимо, що хочемо обмежити ризик *умовними* $\beta = 500$ грн. Тоді $x_1 = 6944.44$, $x_2 = 8055.56$
- ▶ Для $\beta = 1000$, $x_1 = 13889$, $x_2 = 1111.11$
- ▶ Для $\beta = 2000$, можна все класти в ПриватБанк.

Стохастична цільова функція

- ▶ Цікавіше, максимізуємо дохід, але обмежимо L^1 ризик (risk hedging)

- ▶ Використаємо модель:

$$\max \quad E[c_1 x_1 + c_2 x_2] = 1.216x_1 + 1.1475x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} x_1 x_2} = 0.076x_1 \leq \beta \\ & x_1 + x_2 = W_0 = 15K \\ & x_1, x_2 > 0 \end{aligned}$$

- ▶ Для 15000 грн, припустимо, що хочемо обмежити ризик *умовними* $\beta = 500$ грн. Тоді $x_1 = 6944.44$, $x_2 = 8055.56$
- ▶ Для $\beta = 1000$, $x_1 = 13889$, $x_2 = 1111.11$
- ▶ Для $\beta = 2000$, можна все класти в ПриватБанк.

Стохастична цільова функція

- ▶ Цікавіше, максимізуємо дохід, але обмежимо L^1 ризик (risk hedging)

- ▶ Використаємо модель:

$$\max \quad E[c_1x_1 + c_2x_2] = 1.216x_1 + 1.1475x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sqrt{\sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + \sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_1x_2} = 0.076x_1 \leq \beta \\ & x_1 + x_2 = W_0 = 15K \\ & x_1, x_2 > 0 \end{aligned}$$

- ▶ Для 15000 грн, припустимо, що хочемо обмежити ризик *умовними* $\beta = 500$ грн. Тоді $x_1 = 6944.44$, $x_2 = 8055.56$
- ▶ Для $\beta = 1000$, $x_1 = 13889$, $x_2 = 1111.11$
- ▶ Для $\beta = 2000$, можна все класти в ПриватБанк.

Оптимальне використання ресурсів

- ▶ 500 акрів землі під пшеницю, кукурудзу, цукрові буряки (x_1, x_2, x_3)
- ▶ Кожна культура має свої затрати висадження на акр землі
- ▶ Потрібно певна кількість тонн пшениці і кукурудзи під корм, які можна виростити, або закупити (y_1, y_2)
- ▶ Надлишковий урожай, якщо він є, можна продати (w_1, w_2 для пшениці та кукурудзи), але на цукрові буряки існує квота 6000 т, після чого ціна їх продажу змінюється (w_3, w_4 продаж буряків до і після квоти)

Оптимальне використання ресурсів

	Пшеничка	Кукурудза	Бурячки
Висадження (\$/акр)	150	230	260
Ціна купівлі (\$/т)	238	210	–
Ціна продажу (\$/т)	170	150	36 (до 6К) 10 (після 6К)
Мінімальна к-сть (т)	200	240	

Врожайність (т/акр)	Пшеничка	Кукурудзочка	Бурячки
Хороша	3.0	3.6	24.0
Середня	2.5	3.0	20.0
Погана	2.0	2.4	16

Оптимальне використання ресурсів

- ▶ Задача ЛП для середнього сценарію

$$\begin{aligned} \min \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + 210y_2 \\ & - 170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \quad (\text{обмеження площі}) \\ & 2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 \quad (\text{мінімальна к-сть пшениці}) \\ & 3.0x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 \quad (\text{мінімальна к-сть кукурудзи}) \\ & w_3 + w_4 \leq 20x_3 \quad (\text{врожай буряків}) \\ & w_3 \leq 6000 \quad (\text{квота продажу буряків}) \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

Оптимальне використання ресурсів

Середній сценарій

Прибуток: \$118,600

	Пшеничка	Кукурудзочка	Бурячки
Площа	120	80	300
Врожай	300	240	6000
Купівля	–	–	–
Продаж	100	–	6000

Оптимальне використання ресурсів

Поганий сценарій

Прибуток: \$59,950

	Пшеничка	Кукурудзочка	Бурячки
Площа	100	25	375
Врожай	200	60	6000
Купівля	–	180	–
Продаж	100	–	6000

Хороший сценарій

Прибуток: \$167,667

	Пшеничка	Кукурудзочка	Бурячки
Площа	183.33	66.67	250
Врожай	550	240	6000
Купівля	–	–	–
Продаж	350	–	6000

Оптимальне використання ресурсів

- ▶ В поставленій задачі x_1, x_2, x_3 не залежать від врожаю
- ▶ Використаємо другу інтерпретацію: знайдемо окремі набори $w_{1i}, w_{2i}, w_{3i}, w_{3i}, y_{1i}, y_{2i}$ для всіх трьох сценаріїв $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} E[z] &= 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\ &+ \frac{1}{3}(238y_{11} + 210y_{21} - 170w_{11} - 150w_{21} - 36w_{31} - 10w_{41}) \\ &+ \frac{1}{3}(238y_{12} + 210y_{22} - 170w_{12} - 150w_{22} - 36w_{32} - 10w_{42}) \\ &+ \frac{1}{3}(238y_{13} + 210y_{23} - 170w_{13} - 150w_{23} - 36w_{33} - 10w_{43}) \end{aligned}$$

Оптимальне використання ресурсів

s.t.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & \left. \begin{aligned} 3.0x_1 + y_{11} - w_{11} &\geq 200 \\ 3.6x_2 + y_{21} - w_{21} &\geq 240 \\ w_{31} + w_{41} &\leq 24x_3 \\ w_{31} &\leq 6000 \end{aligned} \right\} i = 1 \\ & \left. \begin{aligned} 2.5x_1 + y_{12} - w_{12} &\geq 200 \\ 3.0x_2 + y_{22} - w_{22} &\geq 240 \\ w_{32} + w_{42} &\leq 20x_3 \\ w_{32} &\leq 6000 \end{aligned} \right\} i = 2 \\ & \left. \begin{aligned} 2.0x_1 + y_{13} - w_{13} &\geq 200 \\ 2.4x_2 + y_{23} - w_{23} &\geq 240 \\ w_{33} + w_{43} &\leq 16x_3 \\ w_{33} &\leq 6000 \end{aligned} \right\} i = 3 \end{aligned}$$

Оптимальне використання ресурсів

Очікуваний прибуток

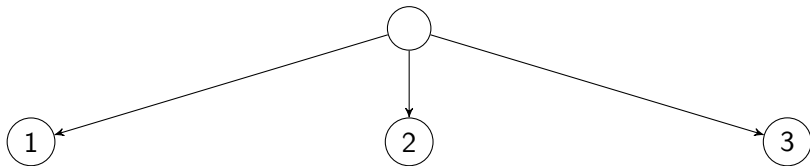
\$108,390

		Пшеничка	Кукурудза	Бурячки
	Площа	170	80	250
Хороший врожай ($i=1$)	Врожай	510	288	6000
	Купівля	—	—	—
	Продаж	310	48	6000
Середній врожай ($i=2$)	Врожай	425	240	5000
	Купівля	—	—	—
	Продаж	225	—	6000
Поганий врожай ($i=3$)	Врожай	340	192	4000
	Купівля	—	48	—
	Продаж	140	—	6000

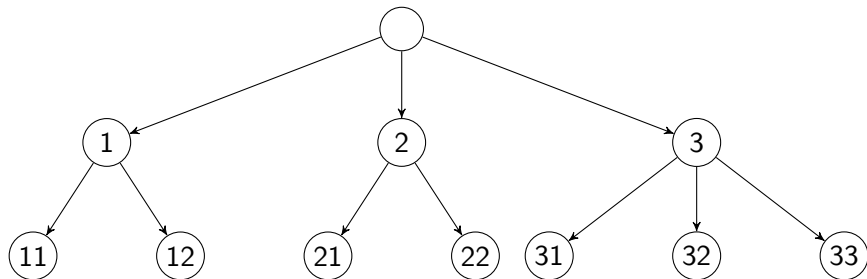
Оптимальне використання ресурсів

- ▶ Розв'язки окремих задач для кожного сценарію і задачі СЛП різні
- ▶ Середнє значення оптимальних прибутку для кожного сценарію окремо – \$115,406
- ▶ Оптимальний очікуваний прибуток задачі СЛП менший – \$108,390
- ▶ Різниця \$7016 називається очікуваним значенням повної інформації (expected value of perfect information)
- ▶ Розгорнута форма задачі СЛП: СЛП звели до детерміністичної задачі ЛП через врахування усіх можливих реалізацій випадкової величини.

Двоступна задача СЛП



Багатоетапна задача СЛП



Двоетапна задача СЛП

- ▶ Задача другого етапу:

$$\begin{aligned} \min \quad & \cancel{150x_1 + 230x_2 + 260x_3} \\ & + 238y_1 + 210y_2 \\ & - 170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\ \text{s.t.} \quad & t_1(s)x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 \\ & t_2(s)x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 \\ & t_3(s)x_3 + w_3 - w_4 \geq 0 \\ & w_3 \leq 6000 \\ & y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ $t(s)$ – випадкове значення урожайності, $s \in \{1, 2, 3\}$
- ▶ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – змінні на першому етапі (тут фіксовані)
- ▶ $\mathbf{y} = (y_1, y_2, w_1, w_2, w_3)$ – змінні на другому етапі

Двоетапна задача СЛП

- ▶ Задача другого етапу (загальний випадок):

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) = \min_y \quad & \mathbf{d} \cdot \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & U\mathbf{y} + T\mathbf{x} \geq \mathbf{h} \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ U – матриця рекурсії
- ▶ T – матриця технологій ($\mathbf{y}$ нас вектор $\mathbf{t}(\xi)$)

Двоетапна задача СЛП

- ▶ Задача першого етапу:

$$\begin{array}{ll}\min & \overbrace{150x_1 + 230x_2 + 260x_3}^{c \cdot x} + E_\xi[Q(x, \xi)] \\ \text{s.t} & Ax \geq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

- ▶ $Q(x) = E_\xi[Q(x, \xi)]$ – функція рекурсії
- ▶ Двоетапна задача СЛП (загальний випадок):

$$\begin{array}{ll}\min & c \cdot x + Q(x) \\ \text{s.t} & Ax \geq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Детерміністичний еквівалент

- ▶ Детерміністичний еквівалент:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + Q(\mathbf{x}) = \sum_i c_i x_i + \left(\sum_j P(\xi = s_j) \cdot \sum_k d_k y_k^{(j)} \right) \\ \text{s.t} \quad & U \mathbf{y}^{(j)} + \mathbf{t}(s_j) \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{h} \quad \forall j \\ & A \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Розподіл портфеля

- ▶ Інвестуватимемо в р2р ПриватБанка або депозити Райффайзен протягом 5 років
- ▶ Щороку можемо перерозподіляти ресурси
- ▶ Нехай доходності не змінюються протягом цих 5 років
- ▶ В рік $T = 5$:

$$\begin{aligned} \max_{x^{(T-1)}} \quad & E[W^T] \\ \text{s.t.} \quad & W_T = c_1 x_1^{(T-1)} + c_2 x_2^{(T-1)} \\ & x_1^{(T-1)} + x_2^{(T-1)} = W^{(T-1)} \\ & x_1^{(T-1)}, x_2^{(T-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ В рік $t = 1, 2, \dots, 3$:

$$\begin{aligned} \max_{x^{(t)}} \quad & E[Q_{t+1}(W^{(t)})] \\ \text{s.t.} \quad & W_t = c_1 x_1^{(t)} + c_2 x_2^{(t)} \\ & x_1^{(t)} + x_2^{(t)} = W^{(t)} \\ & x_1^{(t)}, x_2^{(t)} \geq 0 \end{aligned}$$

Розподіл портфеля

- ▶ Інвестуватимемо в р2р ПриватБанка або депозити Райффайзен протягом 5 років
- ▶ Щороку можемо перерозподіляти ресурси
- ▶ Нехай доходності не змінюються протягом цих 5 років
- ▶ В рік $T = 5$:

$$\begin{aligned} \max_{x^{(T-1)}} \quad & E[W^T] \\ \text{s.t.} \quad & W_T = c_1 x_1^{(T-1)} + c_2 x_2^{(T-1)} \\ & x_1^{(T-1)} + x_2^{(T-1)} = W^{(T-1)} \\ & x_1^{(T-1)}, x_2^{(T-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ В рік $t = 1, 2, \dots, 3$:

$$\begin{aligned} \max_{x^{(t)}} \quad & E[Q_{t+1}(W^{(t)})] \\ \text{s.t.} \quad & W_t = c_1 x_1^{(t)} + c_2 x_2^{(t)} \\ & x_1^{(t)} + x_2^{(t)} = W^{(t)} \\ & x_1^{(t)}, x_2^{(t)} \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ www.math.uh.edu/~rohop/Spring_15/Chapter1.pdf
- ▶ people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/sp.html